# Die Funktion $\mathbf{f(x) = a \cdot \ln(bx + c) + d}$
## Übung

1. Bestimmen Sie jeweils maximale Definitionsmenge $D_{max}$, Gleichung der senkrechten Asymptote sowie die Nullstelle. •◦◦

   a) $f(x) = \ln(2x - 4)$

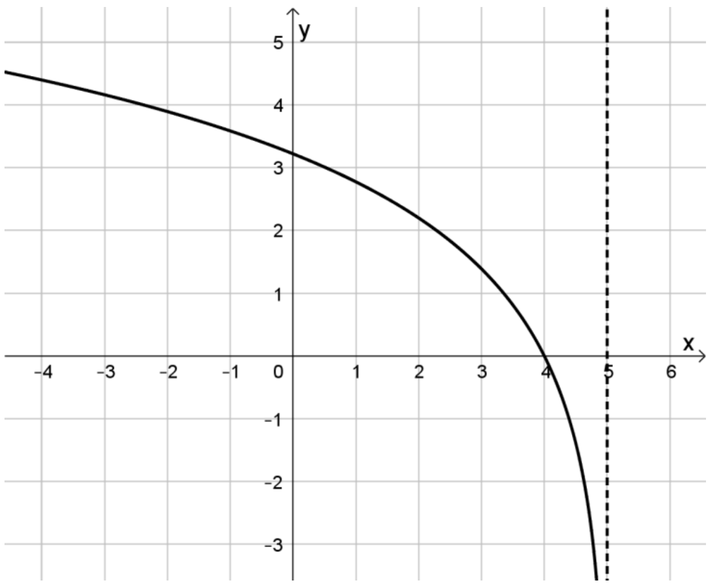
   b) $f(x) = 2 \cdot \ln(x - 3) + 1$

   c) $f(x) = 3 \cdot \ln\left(-\frac{1}{4}x\right)$

   d) $f(x) = -2 \cdot \ln(3x + 4) + 5$

2. Nennen Sie zwei Zahlenkombinationen für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, so dass die zugehörige Funktion $f(x) = a \cdot \ln(bx + c) + d$ eine Nullstelle bei $x_1 = 2$ besitzt. ••◦

3. In unterem Graphen ist eine Funktion mit dem Term $f(x) = a \cdot \ln(bx + c) + d$ zu sehen. Ermitteln Sie die Werte von $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und begründen Sie Ihre Entscheidung. Der Graph wurde gegenüber der ln-Funktion in y-Richtung nicht verschoben und in x-Richtung nicht gestreckt/gestaucht. Die y-Achse wird bei $y = 2\ln(5)$ geschnitten. •••




4. Bilden Sie die zweite Ableitung folgender Funktionen.

   a) $f(x) = \ln(3x)$

   b) $f(x) = \ln(x - 1) - 2$

   c) $f(x) = -4\ln(2x + 3) - 1$

   d) $f(x) = -\ln(5 - x) + 7$

5. Zeigen Sie, dass das Krümmungsverhalten des Graphen von $f(x) = a \cdot \ln(bx + c) + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $a, b \neq 0$ lediglich vom Parameter a abhängt. •••

6. Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = 3 \cdot \ln(0{,}5x + 2) + 1$ nach folgenden Kriterien. •••

- maximale Definitionsmenge
- Symmetrie
- Nullstellen
- Globalverlauf
- lokale Extrema und Monotonie
- Krümmung und Wendepunkte
- Graph

## Die Funktion $f(x) = a \cdot \ln(bx + c) + d$
## Lösung

1.

a) $D_{max} = ]2; \infty[$, senkrechte Asymptote $x = 2$, Nullstelle $x_1 = \frac{5}{2}$.

b) $D_{max} = ]3; \infty[$, senkrechte Asymptote $x = 3$ Nullstelle $x_1 = e^{-\frac{1}{2}} + 3 \approx 3{,}61$.

c) $D_{max} = ]-\infty; 0[$, senkrechte Asymptote $x = 0$, Nullstelle $x_1 = -4$.

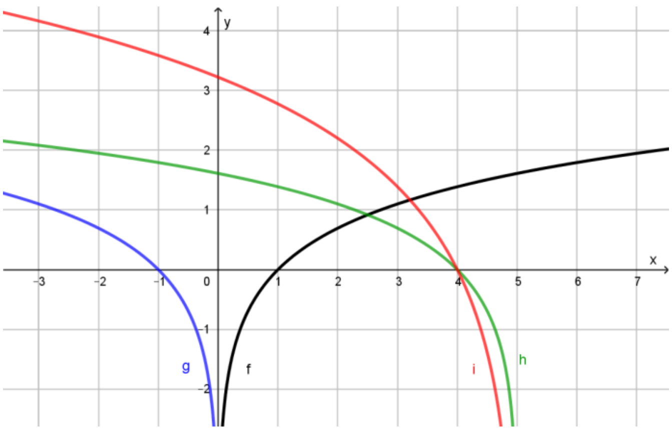
d) $D_{max} = ]-\frac{4}{3}; \infty[$, senkrechte Asymptote $x = -\frac{4}{3}$, Nullstelle $x_1 = \frac{e^{\frac{5}{2}}-4}{3} \approx 2{,}73$.

2. Die von den Parametern abhängige Nullstelle der Funktion lautet $x_1 = \frac{1}{b} \cdot (e^{-\frac{d}{a}} - c)$.
Daher sind einfache Beispiele solche mit $d = 0$ wie z.B. $a = 1, b = \frac{1}{2}, c = 0, d = 0$ oder $a = 7, b = 1, c = -1, d = 0$.

3.

- Keine Verschiebung in y-Richtung: $d = 0$
- Graph nicht in x-Richtung gestreckt: $|b| = 1$. Da der Graph allerdings links von der y-Achse verläuft, muss er gespiegelt sein und es ist $b = -1$
- Graph wurde vor dem Spiegeln um 5 nach links verschoben: $c = 5$
- Der Graph von $f(x) = \ln(-x + 5)$ schneidet die y-Achse bei $\ln(5) \approx 1{,}61$. Damit er sie wie auf dem Bild bei rund $y = 3{,}2$ schneidet, muss $a = 2$ sein

$a = 2, b = -1, c = 5, d = 0$, damit ist $f(x) = 2 \cdot \ln(-x + 5)$




Schwarz: $f(x) = \ln(x)$
Blau: $g(x) = \ln(-x)$
Grün: $h(x) = \ln\big(-(x-5)\big) = \ln(-x + 5)$
Rot: $i(x) = 2 \cdot \ln(-x + 5)$

4.

a) $f'(x) = \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{1}{x}$; $f''(x) = \frac{-1}{x^2}$

b) $f'(x) = \frac{1}{x-1}$; $f''(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$

c) $f'(x) = \frac{-8}{2x+3}$; $f''(x) = \frac{16}{(2x+3)^2}$

d) $f'(x) = \frac{1}{5-x}$; $f''(x) = \frac{1}{(5-x)^2}$

5. Für $f(x) = a \cdot \ln(bx + c) + d$ ist $f'(x) = \frac{ab}{bx+c}$ und $f''(x) = \frac{-ab^2}{(bx+c)^2}$. Da sowohl $b^2$, als auch der Nenner $(bx + c)^2$ von $f''(x)$ positiv sind, hängt das Vorzeichen von $f''(x)$ ausschließlich von a ab: Für $a < 0$ ist der Graph $G_f$ linksgekrümmt, für $a > 0$ rechtsgekrümmt.

6.

Kurvendiskussion von $f(x) = 3\ln(0{,}5x + 2) + 1$ Teil 1 https://youtu.be/BJKMDE_bgxI

Kurvendiskussion von $f(x) = 3\ln(0{,}5x + 2) + 1$ Teil 2 https://youtu.be/5J9FscsNO0U

Kurvendiskussion von $f(x) = 3\ln(0{,}5x + 2) + 1$ Teil 3 https://youtu.be/fEogeFB8v8M